Следует ли копенгагенская интерпретация из математического формализма квантовой механики с необходимостью? Неизбежен ли странный мир?

Лагодинский Владимир Меерович
доцент кафедры прикладной математики
ГУАП

Классическая механика
Принцип Гамильтона

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)\,dt = 0.$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L(x(t),v(t)) = \frac{mv^2}{2} - U(x), \qquad \frac{d}{dt}mv = -\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = \frac{dH}{dt} = 0$$

$$U(x) = -F$$

Общее решение

$$x(t) = C_1 + C_2 t + \frac{F}{m} t^2.$$

Частное решение

$$x(t) = x_0 + vt + \frac{F}{m} t^2$$

Скобки Пуассона

$$\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \equiv \{f, g\}$$

$$\{p_i, q_i\} = -\{q_i, p_i\} = 1$$

Квантовая механика

$$E = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x,y,z)$$

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left[\hat{p}_x, x\right] \equiv \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, x\right] = -i\hbar$$

Уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + U(x,y,z)\Psi$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)$$

“Плотность вероятности”

$$\rho(t,x,y,z) = |\Psi(t,x,y,z)|^2,$$

“Плотность потока вероятности”

$$j_\xi(t,x,y,z) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial\xi}\right), \quad \xi = x,y,z$$

Общее решение

$$\Psi(t,x,y,z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} A(p_x,p_x,p_x)e^{\frac{i}{\hbar}\left(p_x x + p_y y + p_z z - \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}t\right)}dp_x dp_y dp_z$$

Если время однородно

$$\Psi(t,x,y,z) = \psi_E(x,y,z)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$$

УШ при однородном времени

$$E\psi_E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_E + U(\vec{r})\psi_E.$$

Уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z} = 0.$$

Общее решение УШ при однородном времени

$$\psi_E(x,y,z) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} A(p_x,p_y,p_z)\,\delta\left(p_x^2+p_x^2+p_x^2-2mE\right)e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}}\,dp_x dp_y dp_z$$

УШ в однородном пространстве

$$E\psi_E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_E$$

Общее решение

$$\psi_E(x,y,z) = A\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\delta\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2-2mE\right)e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}}\,dp_x dp_y dp_z$$

$$-i\hbar\frac{\partial\psi_E}{\partial x} = p_x\psi_E, \quad -i\hbar\frac{\partial\psi_E}{\partial y} = p_y\psi_E, \quad -i\hbar\frac{\partial\psi_E}{\partial z} = p_z\psi_E$$

Частное решение

$$\psi_{\vec{p}}(x,y,z) = A\exp[i(p_x x+p_y y+p_z z)]$$

Волновая функция свободной частицы

$$\Psi(t,x,y,z) = A\exp[i(p_x x+p_y y+p_z z-Et)]$$

Плотность потока

$$\vec{j}(x,y,z) = |A|^2\frac{\vec{p}}{m}$$

Отражение частицы от идеального зеркала конечной массы

Мысленный эксперимент основан на “законах сохранения энергии и импульса”

$$p + P - p' - P' = 0, \quad |\varepsilon + E - \varepsilon' - E'| \square \frac{\hbar}{\Delta t}$$

Стационарное одномерное двухчастичное УШ

$$\left(E + \frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \psi_E(x_1, x_2) = 0.$$

Решение имеет вид

$$\psi_E(x_1, x_2) = \exp[i(p_1 x_1 + p_2 x_2)] +$$

$$+ A\exp[i(p_1 - k)x_1 + i(p_2 + k)x_2)]$$

$$E = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{(p_1 - k)^2}{2m_1} + \frac{(p_2 + k)^2}{2m_2}, \quad k = 2\frac{p_1 m_2 - p_2 m_1}{m_1 + m_2}.$$

Замена переменных

$$X=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad x=x_1-x_2,\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\quad M=m_1+m_2.$$

УШ в новых переменных

$$\left(E+\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right)\psi_E(x,X)=0.$$

Граничное условие

$$\psi_E(0,X)=0,\quad \forall X\in\mathbb{R}$$

Решение

$$\Psi(t,x,X)=A\exp\left[i\hbar^{-1}\left(PX-Et\right)\right]\sin\left(\hbar^{-1}kx\right)=$$

$$=-\frac{i}{2}A\exp\left(-i\hbar^{-1}Et\right)\left[\exp\left(i\hbar^{-1}(p_1x_1+p_2x_2)\right)-\exp\left(i\hbar^{-1}(p_1'x_1+p_2'x_2)\right)\right].$$

$$p_1'=p_1-2\frac{p_1m_2-p_2m_1}{m_1+m_2},\quad p_2'=p_2+2\frac{p_1m_2-p_2m_1}{m_1+m_2},\quad P=p_1+p_2=p_1'+p_2'$$

Потоки

$$J_X=\frac{P}{M},\quad j_x^+=-j_x^-=\frac{k}{\mu}$$

Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме

Уравнение Шредингера

$$\left(E+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi_E(x)=0,\ \forall x\in[0,a],\quad \psi_E(x)=0,\ \forall x\notin[0,a]$$

Граничные условия

$$\psi_E(0)=\psi_E(a)=0.$$

Решение

$$\psi_E(x)=\begin{cases} A\sin\left(\hbar^{-1}px\right)=\dfrac{i}{2}A\left(e^{-\frac{i}{\hbar}px}-e^{\frac{i}{\hbar}px}\right),\ \forall x\in[0,a], \\ 0,\ \forall x\notin[0,a], \end{cases}\qquad p=\sqrt{2mE}.$$

$$\sin\left(\hbar^{-1}p_n a\right)=0\Rightarrow p_n=\frac{\hbar\pi n}{a},\ E_n=\frac{p_n^2}{2m}=\frac{(\hbar\pi n)^2}{2ma^2}$$

“Плотность вероятности”

$$\rho(x) = |\psi_E(x)|^2 = \begin{cases} |A|^2 \sin^2\left(\dfrac{\pi n x}{a}\right), \forall x \in [0, a], \\ 0, \forall x \notin [0, a] \end{cases}$$

Задача о распределении импульса

$$a(p) = \int \psi_p^* \psi_1 dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp\left(-i \frac{px}{\hbar}\right) dx,$$

$$\left|a(p)\right|^2 \frac{dp}{2\pi\hbar} = \frac{4\pi\hbar^3 a}{\left(p^2 a^2 - \pi^2 \hbar^2\right)^2} \cos^2 \frac{pa}{2\hbar} dp$$

Спасибо за внимание!

в соответствии с соотношениями неопределенности: при неопределенности координаты $\sim l$ неопределенность импульса, а с нею и порядок величины самого импульса $\sim \hbar/l$; соответствующая энергия $\sim (\hbar/l)^2/m$.

Задачи

1. Определить распределение вероятности различных значений импульса для нормального состояния частицы, находящейся в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме.

Решение. Коэффициенты $a(p)$ разложения функции ψ_1 (22.8) по собственным функциям импульса равны

$$a(p) = \int \psi_p^* \psi_1 \, dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp\left(-i\frac{px}{\hbar}\right) dx.$$

Вычислив интеграл и возведя его модуль в квадрат, получим искомое распределение вероятностей

$$|a(p)|^2 \frac{dp}{2\pi\hbar} = \frac{4\pi\hbar^3 a}{(p^2a^2 - \pi^2\hbar^2)^2} \cos^2 \frac{pa}{2\hbar} \, dp.$$

2. Определить уровни энергии для потенциальной ямы, изображенной на рис. 2.

Решение. Дискретным является спектр энергий $E < U_1$, который мы и рассматриваем. В области $x < 0$ волновая функция

$$\psi = c_1 e^{\varkappa_1 x}, \quad \varkappa_1 = (1/\hbar)\sqrt{2m(U_1 - E)},$$