

В. Б. КИРЬЯНОВ
(Каф. в. математики СПбГЭФ)
vkyr@mail.ru

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

- *Предисловие.*
- *0. Фазовое пространство.*
- *1. Квантование.*
- *2. Старшие гармоники.*
- *3. Уравнения движения.*
- *4. Оператор эволюции.*
- *5. Гауссово разложение единицы.*
- *6. Малая эволюция.*
- *7. Функциональное представление малой эволюции.*
- *8. Переобозначения.*
- *9. Элементарное действие.*
- *10. Континуальный интеграл и функционал действия.*

Предисловие

60-70-ые годы: в квантовой оптике переоткрываются «когерентные состояния» квантового гармонического осциллятора.

Квантовая теория осциллятора переписывается на функциональном языке целых функций классической комплексной переменной (1-4), дифференциальный оператор временной эволюции представляется функциональным континуальный интеграл с классическим действием (5-7) устанавливается естественная связь квантовой теории гармонического осциллятора с его равновесной термодинамикой, классической механикой и оптикой.

Ссылки:

1. Квантовая оптика и квантовая радиофизика. – «МИР», М., 1966.
2. Когерентные состояния в квантовой теории. Сб. статей под ред. В. И. Манько. – «МИР», М., 1972.
3. Дж. Клаудер и Э. Сударшан. Основы квантовой оптики. – «МИР», М., 1970.
4. Л. Д. Фаддеев и О. А. Якубовский. Лекции по квантовой механике для студентов - математиков. – Изд-во ЛГУ, Л., 1980.
5. В. Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. – М., 1976.
6. А. Н. Васильев. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. – Изд-во ЛГУ, Л., 1978.
7. А. А. Славнов и Л. Д. Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. – «Наука», М., 1978.

Но все это делается в комплексном фазовом пространстве и ставит задачу осмысления названных связей с «фазовой» точки зрения.

Мои цели:

описание роли фазового пространства

- в классической механике гармонического осциллятора
- и в его квантовой механике:
 - в построении функционального ядра оператора эволюции
 - и его логарифма — классического действия.

0. Фазовое пространство.

Ньютоново уравнение движения:

$$m \ddot{q}(t) = -k q(t),$$

гамильтонова пара уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} m \dot{q}(t) = p(t); \\ \dot{p}(t) = -k q(t) = -\omega^2 q(t); \end{cases} \quad \omega^2 = k / m. \quad \leftrightarrow$$

фазовые переменные a и a^* :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{i p}{\sqrt{m \omega}} + \sqrt{m \omega} q \right) \\ a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-i p}{\sqrt{m \omega}} + \sqrt{m \omega} q \right) \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} q = \frac{a + a^*}{\sqrt{2 m \omega}}; \\ p = \sqrt{m \omega} \frac{a - a^*}{i \sqrt{2}}. \end{cases}$$

Их движение – равномерное вращение по фазовой окружности:

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = -i \omega a(t) \\ \dot{a}^*(t) = i \omega a^*(t) \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} a(t) = e^{-i \omega t} a(0); \\ a^*(t) = e^{i \omega t} a^*(0), \end{cases}$$

постоянного радиуса $|a|$:

$$|a(t)| = |a(0)|.$$

1. Квантование.

Умноженный на ω квадрат радиуса фазовой окружности:

$$\omega a^* a = \omega |a|^2 = \omega \left(\frac{p^2}{2m\omega} + \frac{m\omega q^2}{2} \right) =$$

есть квадратичная форма механической энергии E :

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = E; \quad k = m\omega^2,$$

Ее площадь:

$$\pi |a|^2 = \frac{\pi E}{\omega} =$$

имеет физическую размерность действия: *энергия E на время $1/\omega$* ,

и обезразмеривается квантовой постоянной h :

$$= \frac{\pi h |a|^2}{h} = \pi h |z|^2,$$

Новые фазовые переменные z и z^* – безразмерные комплексные числа:

$$\begin{cases} z = \frac{a}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{2h}} \left(\frac{ip}{\sqrt{m\omega}} + \sqrt{m\omega} q \right) = \frac{iy + x}{\sqrt{2}}; \\ z^* = \frac{a^*}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{2h}} \left(\frac{-ip}{\sqrt{m\omega}} + \sqrt{m\omega} q \right) = \frac{-iy + x}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Физическая размерность действия:

действие = энергия на время = импульс на координату = момент импульса,

– размерность площади фазовой окружности,

которая квантуется по Бору-Зоммерфельду:

$$\oint p dq = n h .$$

где

$$\begin{aligned} \int p dq &= - \int dp q = \frac{1}{2} \int (p dq - dp q) = \\ &= \frac{1}{2i} \int ((da^*)a - a^* da) = \frac{1}{i} \int ((da^*)a) = -\frac{1}{i} \int a^* da \end{aligned}$$

Площади фазовых окружностей осциллятора:

$$-\frac{1}{i} \oint a^* da = -\frac{1}{i} (-i \omega) |a^*|^2 \oint dt = \omega |a|^2 T =$$

измеряются в количестве $|z|^2$ планковских постоянных h :

$$= 2\pi h |z|^2 = 2\pi h n \quad \rightarrow \quad |z|^2 = n = 1, 2, \dots,$$

где $T = 2\pi/\omega$.

В атомной области с линейными размерами q : $q \sim 10^{-8}$ см,
 электронной массой m : $m \sim 10^{-27}$ г,
 оптической частотой ω : $\omega \sim 10^{16}$ 1/с
 и планковской постоянной h : $h = 1,054... \cdot 10^{-27}$ эрг с,
 безразмерная площадь фазовой окружности:

$$z^* z \sim \frac{m \omega q^2}{2h} \sim$$

имеет порядок единиц:

$$\sim \frac{10^{-27} 10^{16} (10^{-8})^2}{10^{-27}} = 1,$$

и быстро увеличивается классической области – с ростом линейного размера, массы и уменьшения частоты осциллирующей частицы.

2. Старшие гармоники.

Безразмерные комплексные числа z и z^* :

$$\begin{cases} z = \frac{1}{\sqrt{2h}} \left(\frac{i p}{\sqrt{m \omega}} + \sqrt{m \omega} q \right) = \frac{i y + x}{\sqrt{2}}; \\ z^* = \frac{1}{\sqrt{2h}} \left(\frac{-i p}{\sqrt{m \omega}} + \sqrt{m \omega} q \right) = \frac{-i y + x}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Вх старшие степени

$$\frac{(z^*)^m}{m!} = \langle z^* | m \rangle; \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

и всевозможные суперпозиции – целые функции $f(z^*)$:

$$f(z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z^*)^m f^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \langle z^* | m \rangle \langle m | f \rangle = \langle z^* | f \rangle,$$

где $f^{(m)}(0)$ – комплексные числа,

«когерентные состояния»:

$$e^{z^* z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z^*)^m z^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \langle z^* | m \rangle \langle m | z \rangle = \langle z^* | z \rangle.$$

3. Уравнения движения.

Перейдем от времени движения t к фазовому углу φ : $\varphi = \omega t$.

Уравнение движения произвольной целой функции $f(z^*)$:

$$\frac{df(z^*(\varphi))}{d\varphi} =$$

по правилу дифференцирования сложной функции фазы φ :

$$= \frac{dz^*(\varphi)}{d\varphi} \frac{df(z^*(\varphi))}{dz^*(\varphi)} = i z^*(\varphi) \frac{df(z^*(\varphi))}{dz^*(\varphi)},$$

дает ее уравнение движения:

$$\frac{df(z^*)}{d\varphi} = i z^* \frac{df(z^*)}{dz^*} =$$

как половину классической скобки Пуассона $\{H, f\}$:

$$= i \left(\frac{dH(z^*, z)}{dz} \frac{df(z^*)}{dz^*} - \frac{dH(z^*, z)}{dz^*} \frac{df(z^*)}{dz} \right) = i \{H(z^*, z), f(z^*)\}$$

с осцилляторной функцией Гамильтона $H(z^*, z)$: $H(z^*, z) = z^* z$,

и целой функцией фазовой переменной $f(z^*)$: $df(z^*)/dz = 0$.

4. Оператор эволюции

Дифференциальный оператор Гамильтона H фазовой эволюции:

$$\frac{d}{d\varphi} = i z^* \frac{d}{dz^*} = i H\left(z^*, \frac{d}{dz^*}\right) =$$

является половиной классического оператора Лиувилля L :

$$= i \left(\frac{dH(z^*, z)}{dz} \frac{d}{dz^*} - \frac{dH(z^*, z)}{dz^*} \frac{d}{dz} \right) = i L.$$

и позволяет формально проинтегрировать уравнение движения:

$$\rightarrow f(z^*(\varphi)) = \exp\left(i \varphi z^*(\varphi) \frac{d}{dz^*(0)}\right) f(z^*(0)).$$

Придание этому формальному решению вычислительного смысла требует построения того пространства осцилляторных состояний, в котором действует наш эволюционный оператор.

5. Гауссово разложение единицы.

Двумерное гауссово разложение единицы:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{dx dy}{2\pi} = \iint e^{-z^* z} \frac{dz^* dz}{2\pi i} =$$

Сдвиг:

$$= \left(\begin{array}{l} z \rightarrow z - \zeta \\ z^* \rightarrow z^* - \zeta^* \end{array} \right) =$$

$$= \iint e^{-(z^* - \zeta^*)(z - \zeta)} \frac{dz^* dz}{2\pi i} = e^{-\zeta^* \zeta} \iint e^{\zeta^* z} e^{-z^* z} e^{z^* \zeta} \frac{dz^* dz}{2\pi i} = 1 \quad \rightarrow$$

Тождественное преобразование

$$\rightarrow e^{\zeta^* \zeta} = \iint e^{\zeta^* z} e^{-z^* z} e^{z^* \zeta} \frac{dz^* dz}{2\pi i}.$$

Ортонормированность «чистых» состояний:

$$\iint \frac{z^m}{\sqrt{m!}} e^{-z^* z} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{dz^* dz}{2\pi i} = \langle m | n \rangle = 1_{n,m},$$

и скалярное произведение произвольных смешанных:

$$\langle g^* | f \rangle = \iint g^*(z) \cdot e^{-z^* z} f(z^*) \frac{dz^* dz}{2\pi i}.$$

6. Малая эволюция.

Дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{d}{d\varphi} f(z^*(\varphi)) = i z^*(\varphi) \frac{d}{dz^*(\varphi)} f(z^*(\varphi)) \quad \leftrightarrow$$

есть уравнение *малой эволюции* из фазовой точки $z^*(\varphi)$

в соседнюю фазовую точку $z^*(\varphi + d\varphi)$:

$$\leftrightarrow \quad f(z^*(\varphi + d\varphi)) =$$

и дается действием

$$= (1 + i d\varphi z^*(\varphi) \frac{d}{dz^*(\varphi)}) f(z^*(\varphi)) =$$

показательного оператора элементарной фазовой эволюции:

$$= \left(\exp\left(i d\varphi z^*(\varphi) \frac{d}{dz^*(\varphi)} \right) \right) f(z^*(\varphi)) =$$

7. Функциональное представление малой эволюции.

При:

$$= \left(f(z^*(\varphi)) = \iint e^{z^*\zeta} e^{-\zeta^*\zeta} f(\zeta^*) \frac{d\zeta^* d\zeta}{2\pi i} \right) =$$

получаем:

$$= \exp\left(i d\varphi z^*(\varphi) \frac{d}{dz^*(\varphi)} \right) \iint e^{z^*(\varphi)\zeta} e^{-\zeta^*\zeta} f(\zeta^*) \frac{d\zeta^* d\zeta}{2\pi i} =$$

гауссову свертку функции f :

$$= \iint e^{i d\varphi z^*(\varphi)\zeta} e^{z^*(\varphi)\zeta} e^{-\zeta^*\zeta} f(\zeta^*) \frac{d\zeta^* d\zeta}{2\pi i},$$

с показательным функциональным ядром оператора малой эволюции:

$$\exp(i d\varphi z^*(\varphi) \cdot \zeta + z^*(\varphi) \cdot \zeta) = \exp(z^*(\varphi) \cdot (i d\varphi + 1) \cdot \zeta).$$

8. Переобозначения.

Присоединение к логарифму полученного функционального ядра:

$$z^*(\varphi)(i d\varphi + 1)\zeta = i d\varphi z^*(\varphi)\zeta + z^*(\varphi)\zeta -$$

логарифма $-\zeta^*\zeta$ гауссовой меры:

$$-\zeta^*\zeta =$$

дает квадратичную форму логарифма гауссова представления малой эволюции:

$$= (i d\varphi \cdot z^*(\varphi) + z^*(\varphi) - \zeta^*) \cdot \zeta =$$

Немые подынтегральные переменные ζ^* и ζ полагаются значениями фазовых переменных z^* и z в предыдущий фазовой точке $\varphi - d\varphi$:

$$= \left(\begin{array}{l} \zeta^* = z^*(\varphi - d\varphi); \\ \zeta = z(\varphi - d\varphi), \end{array} \right) =$$

Выделяется элементарное приращение $dz^*(\varphi - d\varphi) = z^*(\varphi) - z^*(\varphi - d\varphi)$:

$$= (i d\varphi \cdot z^*(\varphi) + dz^*(\varphi - d\varphi)) \cdot z(\varphi - d\varphi) = dS(z^*(\varphi); z(\varphi)),$$

для которого имеем:

$$\begin{aligned} dz^*(\varphi - d\varphi) \cdot z(\varphi - d\varphi) &= \\ &= d(z^*(\varphi - d\varphi) \cdot z(\varphi - d\varphi)) - z^*(\varphi) \cdot dz(\varphi - d\varphi) = 0 - z^*(\varphi) \cdot dz(\varphi - d\varphi), \end{aligned}$$

при:

$$|(z^*(\varphi))|^2 = |(z^*(0))|^2 \quad \leftrightarrow \quad d|(z^*(\varphi))|^2 = 0.$$

9. Элементарное действие.

Логарифм dS гауссова представления ядра элементарной эволюции:

$$dS(z^*(\varphi); z(\varphi)) = (i d\varphi \cdot z^*(\varphi) + dz^*(\varphi - d\varphi)) \cdot z(\varphi - d\varphi) =$$

становится квадратичной формой:

$$= -z^*(\varphi) \cdot dz(\varphi - d\varphi) + i d\varphi \cdot z^*(\varphi) \cdot z(\varphi - d\varphi) =$$

с дифференциальным оператором $-d + i d\varphi = (-d/d\varphi + i) d\varphi$:

$$= z^*(\varphi)(-d + i d\varphi)z(\varphi - d\varphi) = z^*(\varphi)\left(-\frac{d}{d\varphi} + i\right)z(\varphi - d\varphi) \cdot d\varphi,$$

и малая фазовая эволюция $f(z^*)$ на малый фазовый угол $d\varphi$:

$$f(z^*(\varphi + d\varphi)) = \left(\exp(i d\varphi z^*(\varphi) \frac{d}{dz^*(\varphi)}) \right) f(z^*(\varphi)) =$$

представляется сверткой с полученным функциональным ядром:

$$= \iint \frac{dz^*(\varphi - d\varphi) dz(\varphi - d\varphi)}{2\pi i} f(z^*(\varphi - d\varphi)) \exp(z^*(\varphi)(-d + i d\varphi)z(\varphi - d\varphi)).$$

10. Континуальный интеграл и функционал действия.

Полная фазовая эволюция целой функции $f(z^*)$ на конечный фазовый угол φ

$$f(z^*(\varphi + d\varphi)) = \exp\left(i\varphi \cdot z^*(\varphi) \frac{d}{dz^*(0)}\right) f(z^*(0)) =$$

определяется бесконечным произведением полученных малых эволюций:

$$= \left(\prod_{\alpha=0}^{\varphi} \exp(i d\alpha \cdot z^*(\alpha) \frac{d}{dz^*(\alpha)}) \right) f(z^*(0)) =$$

получается многократной интегральной сверткой их функциональных ядер и приводит к континуальному интегралу:

$$= \int \left(\prod_{\alpha=0}^{\varphi} \frac{dz^*(\alpha) dz(\alpha)}{2\pi i} \right) \exp\left(\int_0^{\varphi} z^*(\alpha + d\alpha)(-d + i d\alpha) z(\alpha) \right) f(z^*(0)).$$

с классическим действием в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} S(z^*(\varphi); z(\varphi)) &= \int_0^{\varphi} (z^*(\alpha + d\alpha)(-d + i d\alpha) z(\alpha)) d\alpha = \\ &= \int_0^{\varphi} \left(z^*(\alpha + d\alpha) \left(-\frac{d}{d\alpha} + i\right) z(\alpha) \right) d\alpha. \end{aligned}$$