

# 100 лет общей теории относительности Эйнштейна: достижения и проблемы

**Гриб Андрей Анатольевич**

профессор, д.ф.-м.н.

Российский государственный педагогический университет  
имени А. И. Герцена

конференция, посвященная 100 -летию Общей теории относительности  
Эйнштейна  
-СПб, 2015-

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad i, k = 0, 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$g_{ik} \rightarrow g_{ik}(t, x, y, z) \quad (3)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \neq 0 \quad (4)$$

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \neq 0 \quad (5)$$

$$dS^2 = g_{00} c^2 dt^2 + g_{11} dx^2 + g_{22} dy^2 + g_{33} dz^2 \quad (6)$$

# Метрика Шварцшильда в сферических координатах.

$$dS^2 = \underbrace{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right) \quad (7)$$

$$dS^2 \approx c^2 dt^2 - \underbrace{\frac{2GM}{r}} dt^2 - dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right) = \quad (8)$$
$$c^2 dt^2 - \underbrace{\frac{2GM}{r}} dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Время течет по разному в разных точках пространства. Почему  $g_{00}$ ?

$$dS^2 = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) \quad (9)$$

$$\begin{cases} x' = x \cosh \frac{gt}{c} + \frac{c^2}{g} \left( \cosh \frac{gt}{c} - 1 \right) \\ y' = y, z' = z \\ t' = \frac{c}{g} \sinh \frac{gt}{c} + \frac{x}{c} \sinh \frac{gt}{c} \end{cases} \quad (10)$$

Пусть  $\frac{gt}{c} \ll 1$ , тогда  $x' = x + \frac{1}{2}gt^2$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ ,  $t' = t$  (10)  $\rightarrow$  (9)

$$dS^2 = \left( c + \frac{gx}{c} \right)^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (11)$$

$$dS^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (12)$$

при  $|gx| \ll c^2$   $U = -gx$

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} \quad R = g^{ik}R_{ik} = -\frac{8\pi G}{c^4}T \quad (14)$$

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T \right) \quad (13)$$

$$R_{ik} = g^{lm}R_{limk} \quad (15)$$

$$R_{limk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p) \quad (16)$$

$$g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l$$

$$T_{ik} = (p + \epsilon)U_iU_k - pg_{ik}$$

# Статическое решение Шварцшильда. Наблюдаемые подтверждения.

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2\right)$$

- Искривление лучей света Солнца. 1919 г. Угол  $\delta = 1.70''$ .
- Движение перигелия Меркурия.  $43''$  (для Земли  $3.8''$ ) в 100 лет.
- Гравитационное красное смещение.  $dT = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} dt$ ,  
 $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 2 \times 10^{-6}$  для Солнца.  $h = 25\text{м}$   $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 10^{-16}$
- Радиолокация Венеры и Марса.  $\delta t \approx \frac{2r_g}{c} \ln\left(\frac{R_e R_v}{\rho^2}\right)$ ,  
 $\delta t = 2 \times 10^{-4}\text{с}$ .
- Гравитационные линзы.
- Черные дыры.  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$
- Космология. А.А. Фридман 1922 г. Нестационарное решение уравнений Эйнштейна.

# Квантовая теория в искривленном пространстве-времени.

- Квантовая теория в искривленном пространстве-времени.
  - Рождение частиц.

$$\left(\nabla_i \nabla^i + \xi R + m^2\right) \varphi(x) = 0 \quad (17)$$

$$\nabla_i \nabla^i \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right), \quad g = \det g_{ik} \quad (18)$$

$$\epsilon^{(s)} = 2mn^{(s)} = 2b^{(s)} m \left(\frac{m}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

$$b^{(0)} = 5.3 \times 10^{-4}, \quad b^{(\frac{1}{2})} = 3.9 \times 10^{-3}$$

- Изотропизация.

$$dS^2 = c^2 dt^2 - a_1^2 dx^2 - a_2^2 dy^2 - a_1^2 dz^2 \quad (20)$$

$$dS^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1 + \alpha) dx_2^2 - (1 - \alpha) dx_3^2 - 2\beta dx_2 dx_3 \quad (21)$$

$$\alpha(x^0 \pm x^1), \quad \beta(x^0 \pm x^1)$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{K}_{\alpha\beta}^{\dots 2} \quad (22)$$



- Проблема сингулярности.
- Проблема квантования гравитации.



## ГРИБ АНДРЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

академик РАН, лауреат Европейской академии «Галилео», доктор физико-математических наук, профессор  
[thphys@herzen.spb.ru](mailto:thphys@herzen.spb.ru)